

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

#### Aufgabenteil B1 – Analysis – MP3-Player

Ein großer Internet-Versandhändler hat einen MP3-Player im Angebot und modelliert die zeitliche Entwicklung der Anzahl der pro Tag verkauften MP3-Player zunächst ausschließlich mit der Funktion  $f$ , wobei gilt:

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{50}x} \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq x \leq 400.$$

Dabei gibt  $x$  die Zeit ab dem Verkaufsstart in Tagen und  $f(x)$  die Anzahl der verkauften Einheiten in 1000 pro Tag an.

#### 1. Verlauf des Funktionsgraphen

1a) **Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion  $f$  in das Koordinatensystem der Anlage 1 nur auf Grundlage der Punkte an den folgenden Stellen ein:

- für  $0 \leq x \leq 150$  in Abständen von 10 und
- für  $150 \leq x \leq 400$  in Abständen von 50.

Eine Wertetabelle brauchen Sie nicht anzugeben. (5 BE)

1b) **Erläutern** Sie die Bedeutung des Hochpunktes im Sachzusammenhang. (2 BE)

#### 2. Maximaler Absatz

2a) **Bestimmen** Sie **ohne Verwendung des Taschenrechners** den Zeitpunkt, an dem die meisten MP3-Player pro Tag verkauft werden. (6 BE)

2b) **Geben** Sie an, wie viele MP3-Player pro Tag maximal verkauft werden. (1 BE)

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

#### 3. Integration

3a) **Weisen** Sie nach, dass die Funktion  $F$  mit  $F(x) = -50x \cdot e^{-0,02x} - 2500 \cdot e^{-0,02x}$  eine Stammfunktion zu  $f$  ist. (2 BE)

3b) **Bestimmen** Sie den Wert des Integrals  $\int_0^{200} f(x)dx$  und geben Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang an. (2 BE)

#### 4. Gesamtabsatz

Die Zeitdauer vom ersten bis zum letzten Verkaufstag nennt man auch Produktzyklus oder Produktlebenszyklus. Da die Modellfunktion  $f$  für  $x > 0$  aber keine Nullstelle besitzt, bestimmt ein Mitarbeiter aus der Management-Abteilung des Internet-Versandhändlers die Wendestelle  $x = 100$  des Graphen und schlägt vor, ab dem entsprechenden Zeitpunkt die zeitliche Entwicklung der pro Tag verkauften Einheiten als eine lineare Abnahme zu modellieren.

4a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente und den Zeitpunkt, an dem gemäß der abgeänderten Modellfunktion kein MP3-Player mehr verkauft wird. (Kontrollergebnis für den Zeitpunkt: 200 Tage) (4 BE)

4b) **Berechnen** Sie mit der abgeänderten Modellfunktion die Gesamtstückzahl der verkauften MP3-Player für den gesamten Zeitraum des Produktzyklus. (5 BE)

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

#### 5. Verallgemeinerung auf weitere Produkte

Der Internet-Versandhändler hat nun festgestellt, dass auch andere Produkte aus seinem Angebot wie z. B. Computer-Spiele, USB-Speicher oder bestimmte Smartphones ähnliche Verkaufsentwicklungen durchlaufen. Er verallgemeinert die zeitliche Entwicklung der pro Tag verkauften Einheiten solcher Produkte zu einer Funktionenschar  $f_{k;c}$  mit

$$f_{k;c}(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{k}x+c} \text{ mit } x, k, c \in \mathbb{R}, \text{ wobei } x, c \geq 0 \text{ und } k > 0.$$

Die Werte der Parameter  $k$  und  $c$  hängen dabei vom jeweiligen Produkt ab.

5a) **Zeigen** Sie, dass jede Funktion der Schar ihr Maximum an der Stelle  $x = k$  annimmt. (8 BE)

5b) Für ein bestimmtes Produkt, das Smartphone  $SM$ , ergibt sich, dass am Zeitpunkt 100 Tage nach Verkaufsstart die maximale Anzahl von verkauften Einheiten 165 000 pro Tag beträgt.

**Bestimmen** Sie die Parameter  $k$  und  $c$  so, dass die Funktion  $f_{k;c}$  den genannten Sachverhalt modelliert. **Geben** Sie dafür zunächst einen Term für den maximalen Funktionswert in Abhängigkeit der Parameter  $k$  und  $c$  an. (5 BE)

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

#### Aufgabenteil B2 – Geometrie – Paketlieferung

Für ein Gebiet in Deutschland soll geprüft werden, ob Paketlieferungen per Drohne möglich sind. Die Drohne soll von einer Basis aus starten und ein Paket auf der Dachterrasse eines Hauses ablegen.

Das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die  $x_1x_2$ -Ebene dargestellt. Der Punkt  $A(4 | 2 | 0)$  beschreibt die Lage der Basis und der Punkt  $T(124 | 52 | 0,3)$  die Lage der Dachterrasse.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 Meter in der Realität.

- a) **Begründen** Sie, dass sich die Dachterrasse in einer Höhe von 30 m befindet. (1 BE)

Zunächst wird ein Direktflug betrachtet, bei dem die Drohne geradlinig von der Basis zur Dachterrasse fliegen soll.

- b) **Begründen** Sie, dass die Gerade  $f$  mit

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 120 \\ 50 \\ 0,3 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

durch die Punkte  $A$  und  $T$  verläuft.

**Geben** Sie ein Intervall  $I$  an, so dass der Flug von der Basis zur Dachterrasse durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 120 \\ 50 \\ 0,3 \end{pmatrix}; \quad r \in I$$

beschrieben wird.

**Bestimmen** Sie die Entfernung von der Basis zur Dachterrasse.

**Berechnen** Sie, wie viele Minuten die Drohne für die Flugstrecke benötigt, wenn sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  fliegt. (4 BE)

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

Eine Hochspannungsleitung führt – im Modell betrachtet – entlang der Strecke  $h$  mit

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 19 \\ 0,11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,01 \end{pmatrix}; \quad s \in [0; 10]$$

- c) **Weisen** Sie **nach**, dass die Drohne beim geradlinigen Flug von der Basis zur Dachterrasse mit der Hochspannungsleitung kollidieren würde.

**Zeigen** Sie, dass die Kollision unter einem Schnittwinkel von etwa  $40,8^\circ$  erfolgen würde, und **berechnen** Sie den Schnittpunkt. (6 BE)

Um die Probleme des Direktfluges zu umgehen, wird die Flugplanung für die Drohne geändert. Dazu wird der Flug in zwei Abschnitte aufgeteilt, die im Modell so beschrieben werden:

- Vom Startpunkt  $A$  fliegt die Drohne geradlinig zum Punkt  $B$  (80 | 34 | 0,2).
- Im Punkt  $B$  ändert die Drohne ihren Kurs in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \\ 0,05 \end{pmatrix}$ .

- d) **Geben** Sie eine Gleichung für die Gerade  $l$  **an**, auf der der Kurs der Drohne von  $B$  in Richtung  $\vec{v}$  liegt.

**Zeigen** Sie, dass die Dachterrasse auf diesem Kurs liegt. (2 BE)

Wenn die Drohne das Paket auf der Dachterrasse abgelegt hat, soll sie zurückkommen. Dazu fliegt sie von der Dachterrasse in Richtung von  $\vec{w}$  mit

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -40 \\ -16,5 \\ -0,1 \end{pmatrix}$$

geradlinig bis zur Erdoberfläche.

- e) **Bestimmen** Sie die Entfernung der Drohne zur Basis, wenn die Drohne die Erdoberfläche wieder erreicht hat. (3 BE)

## Deutsches Internationales Abitur 2025 – Region 14

### FACH Mathematik – Aufgabe 2

Das dreieckige Brutgebiet eines seltenen Vogels wird durch die Eckpunkte  $E(40 | 120 | 0)$ ,  $F(100 | 52 | 0)$  und  $G(120 | 100 | 0)$  beschrieben.

- f) **Begründen** Sie ohne Rechnung, dass die Drohne das Brutgebiet auf ihrem zweiten Flugabschnitt – das ist im Modell der Flugabschnitt von Punkt  $B$  zu Punkt  $T$  – nicht überfliegt. (2 BE)
- g) Der Punkt  $F$  ist der Punkt des Brutgebietes, der zur Flugbahn der Drohne auf ihrem zweiten Flugabschnitt den geringsten Abstand hat. **Berechnen** Sie diesen Abstand. (5 BE)

Für Übungszwecke soll die Drohne geradlinig von der Basis aus verschiedene Punkte anfliegen, die auf einer gegebenen Parabel liegen. Bevor die Drohne einen neuen Punkt der Parabel anfliegt, kehrt sie immer wieder zur Basis zurück.

Im Modell (siehe Abbildung 5) werden die anzufliegenden Parabelpunkte wie folgt definiert:

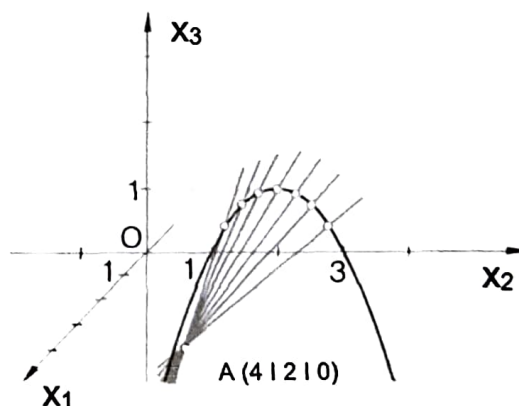


Abbildung 5

- Die Parabel liegt in der  $x_2x_3$ -Ebene.
  - Die Parabel lässt sich mit der Gleichung
$$x_3 = -x_2^2 + 4x_2 - 3$$
beschreiben.
  - Für die anzufliegenden Parabelpunkte gilt  $x_3 > 0$ .
- h) **Geben** Sie eine Parameterdarstellung der Gleichung für die beschriebene Geradenschar **an**. (2 BE)